博弈论 2018 年春季 期中测验（时间：5 月 25 日，星期五）

姓名：____________________ 学号：____________________

1 在以下博弈的标准式中

	L	M	R
T	3，0	2，1	5，2
C	4，4	2，2	3，3
B	2，3	1，2	4，0

（1）哪些战略不会被重复剔除严格劣战略所剔除？

8′ 第1个参与人的策略 T 和 C，4′ 第2个参与人的策略 L 和 R. 4′

	L	R
T	3，0	5，2
C	4，4	3，3.

（2）本博弈的纯策略纳什均衡是什么？

8′ NE 是(1)第1个参与人用策略 C，第2个参与人用策略 ~~L~~ L. 4′ (2)第1个参与人用策略 T，第2个参与人用策略 R. 4′

（3）请说明：为什么纳什均衡不可能在重复剔除严格劣战略的过程中被剔除。

4′ 严格劣战略满足

$v(s_i, s_j) < v(s_i', s_j)$ 对所有 s_j 都成立. 2′

而在纳什均衡中

$v(s_i^*, s_j^*) \geq v(s_i, s_j^*)$ 对给定 s_j^* 成立. 2′

2 企业 1 和企业 2 生产两种有差异的产品，产品 1 和产品 2。如果企业 1 和企业 2 分别选择价格 p_1 和 p_2 ，消费者对企业 i 的产品的需求为

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$$

其中$a > 0$，$0 < b < 2$。我们假定企业生产没有固定成本，并且边际成本为常数c，$c < a$。两个企业同时行动（选择各自的价格）时，企业 i 的价格选择的最优反应函数 $R_i(p_j)$ 分别是什么？请作图说明并找到纳什均衡的价格组合。

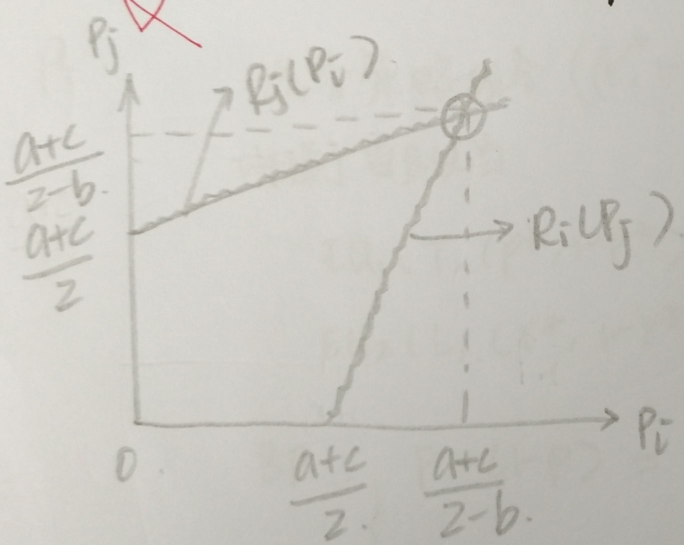
两个企业同时选择各自的价格以最大化各自的利润

$$\max_{0 \le P_i} (P_i - c)(a - P_i + bP_j)$$

FOC: $a - 2P_i + bP_j + c = 0.$

$$P_i = \frac{a+c+bP_j}{2}.$$

$$\therefore P_i = R_i(P_j) = \frac{a+c+bP_j}{2}.$$



当P_i和P_j互为最优反应的价格组合时

$$\begin{cases} P_i = \dfrac{a+c+bP_j}{2} \\ P_j = \dfrac{a+c+bP_i}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{a+c+b\left(\frac{a+c+bP_i}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow P_i = \left(1+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{2}(a+c) + \frac{b^2}{4}P_i$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{b^2}{4}\right)P_i = \frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{2}\right)(a+c) \Rightarrow P_i = \frac{1}{2}\frac{a+c}{1-\frac{b}{2}} = \frac{a+c}{2-b}.$$

且 $P_j = \dfrac{a+c+b\left(\frac{a+c}{2-b}\right)}{2} = \dfrac{a+c}{2-b}.$

纳什均衡的价格组合为 $\left(\frac{a+c}{2-b}, \frac{a+c}{2-b}\right)$.

3 求出下面标准式博弈的混合战略纳什均衡解并证明其是一个纳什均衡。

		L p	R $1-p$
r	T	1，-1	-1，2
$1-r$	B	-2，4	2，2

对参与人1来说，她的混合策略$(r, 1-r)$带来的期望收益

$$EU_1(r, 1-r) \geq u_1(T) \quad (1)$$

$$EU_1(r, 1-r) \geq u_1(B). \quad (2)$$

对参与人2来说，她的混合策略$(p, 1-p)$带来的期望收益 8'

$$EU_2(p, 1-p) \geq u_2(L). \quad (3)$$

$$EU_2(p, 1-p) \geq u_2(R). \quad (4)$$

混合策略组合$((r^*, 1-r^*), (p^*, 1-p^*))$是一个纳什均衡当且仅当

$$EU_1(T, (p^*, 1-p^*)) = EU_1(B, (p^*, 1-p^*)) \quad (5)$$

$$EU_2(L, (r^*, 1-r^*)) = EU_2(R, (r^*, 1-r^*)) \quad (6).$$

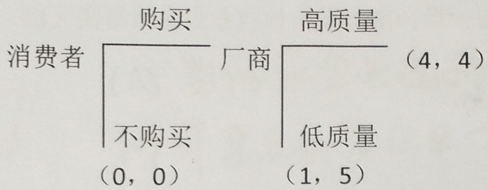
即
$$\begin{cases} p-(1-p) = -2p+2(1-p) & 4' \\ -r+4(1-r) = 2r+2(1-r) & 4' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6p^* = 3 \\ 5r^* = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^* = \frac{1}{2} \\ r^* = \frac{2}{5} \end{cases} \quad 4'$$

可用式(5)(6)检查混合策略是否是一个纳什均衡.

也可用式(1)~(4)检查混合策略是否是一个……

4 一家垄断厂商为消费者的住宅提供宽带服务，消费者首先决定购买或者不购买宽带服务，然后厂商决定提供服务的质量。博弈树如下所示



（1）在题目背景下，如何理解使用逆向归纳法求解动态博弈问题时的理性假定——“参与者是理性的”是共同知识？

在此题中包含三点：

6'

① 消费者是理性的，在"购买"和"不购买"间选择使自己收益最大的策略。 2'

② 厂商是理性的，在"高质量"和"低质量"间选择使自己收益最大的策略。 2'

③ 消费者推断厂商是理性的。 2'

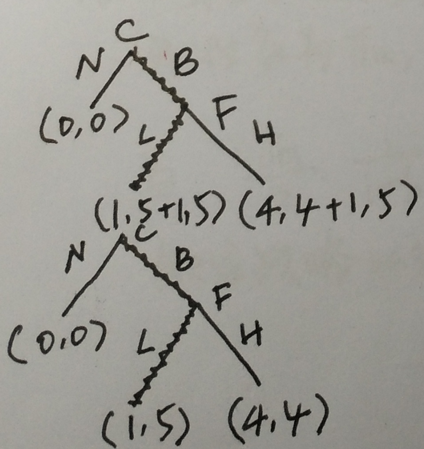
（2）如果这个博弈只进行一次，那么这个博弈的子博弈精炼纳什均衡是什么？

厂商选择低质量服务，消费者选择购买产品。

6'

子博弈精炼纳什均衡为（购买，低质量）。

（3）如果这个博弈进行两次，且消费者宣布这样一个战略：如果厂商会提供高质量的服务，我将继续购买；但一旦受骗获得低质量服务，我将不再购买。简要说明（a）消费者的这一威胁/惩罚可信吗？（b）厂商在第一阶段会提供高质量服务吗？



(a) 消费者的威胁不可信。

因为如果厂商在第一阶段提供低质量服务，消费者在第二阶段不购买，则第二阶段收益为0，低于他继续购买可能获得的收益1或4. 4'

(b) 在理性共识下，厂商推断消费者在第二阶段仍会购买，因此在第一阶段仍会提供低质量服务。 4

(BB, LL)

这个二阶段重复博弈的子博弈精炼NE是（购买购买，低质量低质量）

5 企业 1 和企业 2 生产同质产品，分别选择价格 p_1 和 p_2。假设 $p_i < p_j$ 时，消费者对企业 i 的产品的需求为 $a - p_i$；$p_i > p_j$ 时为 0；$p_i = p_j$ 时为 $(a - p_i)/2$。同时假设不存在固定成本，且边际成本为常数 c，$c < a$。

（1）简要说明企业同时选择价格时惟一的纳什均衡是每个企业的定价均为 c。

7'

(a) 当两家企业选择的价格不一样时，价高企业有动机降价至与另一家企业一样的价格，因此两家企业定价会一致。

(b) 当两家企业定价相同但高于边际成本c时，每家企业都有动机降价(一点点)以获得更多的市场份额，因此两家企业最终会定价在边际成本c上。

(c) 此时，两家企业均没有动机提价(会失去市场份额)也没有动机降价(会损失利润)，因此两家企业定价为c是惟一的纳什均衡。

（2）考虑基于上述阶段博弈的无限重复博弈，请证明在一个子博弈精炼纳什均衡中，当且仅当贴现因子 $\delta > 1/2$ 时，企业可以使用触发战略以维持垄断条件下的价格水平 $(a+c)/2$。

7'

给定另一企业在t阶段的策略是定价在 $\frac{a+c}{2}$ 上。

(a) 则企业使用触发策略在t阶段和之后所有阶段收益为

$$\frac{\pi_m}{2}+\frac{\pi_m}{2}\delta+\frac{\pi_m}{2}\delta^2+\cdots=\frac{\pi_m}{2}\cdot\frac{1}{1-\delta}.$$

其中 $\pi_m=(p_m-c)(a-p_m)=\frac{(a-c)^2}{4}$

(b) 如果企业偏离触发策略，即在t阶段降价，则在t阶段收益为 π_m，而在t阶段之后收益为 0.

当 $\frac{\pi_m}{2}\cdot\frac{1}{1-\delta}>\pi_m$，即 $\delta>\frac{1}{2}$ 时，企业可以使用触发战略以维持垄断条件下价格 $\frac{a+c}{2}$.

6'

（3）考虑（2）中所述的无限重复博弈，但考虑以下战略空间有限的情况（ε是一个很小的正数）。其中每个阶段的博弈标准式如下所示

	$p_2 = c$	$p_2 = \frac{(a+c)}{2} - \varepsilon$	$p_2 = (a+c)/2$
$p_1 = c$	0，0	0，0	0，0
$p_1 = \frac{(a+c)}{2} - \varepsilon$	0，0	$\pi'_m/2$，$\pi'_m/2$	π_ε，0
$p_1 = (a+c)/2$	0，0	0，π_ε	$\pi_m/2$，$\pi_m/2$

证明在何种情况下有这样一个子博弈精炼纳什均衡，企业可以使用触发战略以维持垄断条件下的价格水平$(a+c)/2$。

给定在t阶段另一家企业使用垄断价格 $\frac{a+c}{2}$ 作为自己的策略.

(a) 那么，企业在t阶段也使用垄断价格 $\frac{a+c}{2}$，则其在t阶段及以后阶段的收益为

$$\frac{\pi_m}{2} + \frac{\pi_m}{2}\delta + \frac{\pi_m}{2}\cdot\delta^2 + \cdots = \frac{\pi_m}{2}\frac{1}{1-\delta}$$

(b) 如果企业在t阶段降价到 $\frac{a+c}{2} - \varepsilon$，则其在t阶段的收益为 π_ε，另一企业在t阶段结束时观察到自己的收益为0，因此在t+1阶段也会降价. 如果降价后的价格恰好等于 $\frac{a+c}{2} - \varepsilon$，则企业1在t+1阶段的收益为 $\pi_m'/2$. 如果降价后的价格等于c则企业1t阶段收益为0.

这两种情况下企业1在t阶段及以后阶段的收益分别为

$$\pi_\varepsilon + \frac{\pi_m'}{2}\delta + \frac{\pi_m'}{2}\delta^2 + \cdots = \pi_\varepsilon + \frac{\pi_m'}{2}\frac{\delta}{1-\delta}$$

或

$$\pi_\varepsilon + 0 = \pi_\varepsilon.$$

其中 $\pi_m = \frac{(a-c)^2}{4}$, $\pi_m' = \frac{(a-c)^2}{4} - \varepsilon^2$, $\pi_\varepsilon = \frac{(a-c)^2}{4} - \varepsilon^2$. 2'

$\pi_m/2 \cdot \frac{1}{1-\delta} > \pi_\varepsilon$ 或 $\pi_m/2 \cdot \frac{1}{1-\delta} > \pi_\varepsilon + \frac{\pi_m'}{2}\frac{\delta}{1-\delta}$ 4'