华中科技大学经济学院

本科生《博弈论》期末考试（开卷）

任课教师：唐莹、易鸣

星期五，2018 年 06 月 29 日

姓名：____________________ 班级：____________________ 学号：__________________________

第一题（共二题）分值：$5+5+25+10+10+10=65$

考虑一个主权货币市场。这个市场只有两个参与人：投机者 1 和投机者 2。两个参与人同时决定自己的行为究竟是攻击 (标记为 k) 还是不攻击 (标记为 nk) 该货币。货币的基本面（抗攻击能力）为 θ，这一水平不为投机者所知，但她们知道 θ 是由在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量抽取的一个实现值。如果一个投机者选择不攻击，那么她的收益一定为 0（无论对方选择什么、也无论货币的基本面如何）。如果一个投机者选择攻击，她需要承担攻击成本 $c \in (0,1)$，如果该货币最终被迫贬值，那么她在期货市场可赚得 1 个单位的收入，而这只会在参与攻击该货币的投机者足够多时才会发生。具体地，一个选择攻击的投机者收益函数描述如下：

- 定义投机者中选择攻击该货币的比例为 ℓ（即 ℓ 只能取值 0、$\frac{1}{2}$、1 中的一个）。
- 如果 $\ell \geq \theta$，则她的收益为 $1-c$。
- 如果 $\ell < \theta$，则她的收益为 $-c$。

上述信息皆为共同知识。在以下的所有问题中，我们均只考虑两位投机者的纯策略。

(a) 此博弈是一个非完全信息静态博弈（贝叶斯博弈）吗？请解释原因。

(b) 此博弈是一个不对称信息博弈吗？如果是，请解释何种信息在那些参与人之间不对称。如果不是，请解释原因。

(c) 请定义此博弈的标准式。注意：请给出完整定义，如果有某些集合、函数、或者函数中的自变量属于平凡定义的情况，也请你不厌其烦地将其写出。

(d) 该博弈是否存在一个均衡，其中两个投机者分别选择攻击和不攻击两种不同的策略？解释你的结论。

(e) 给定 $c = \frac{1}{8}$，该博弈是否存在一个均衡，其中两个投机者均选择不攻击？该博弈是否存在一个均衡，其中两个投机者均选择攻击？请解释你的回答。

(f) 给定 $c = 0.8$，该博弈是否存在一个均衡，其中两个投机者均选择不攻击？该博弈是否存在一个均衡，其中两个投机者均选择攻击？请解释你的回答。

∞∞

第二题（共二题）分值：$20 + 10 + 5 = 35$

考虑图1中的博弈树。

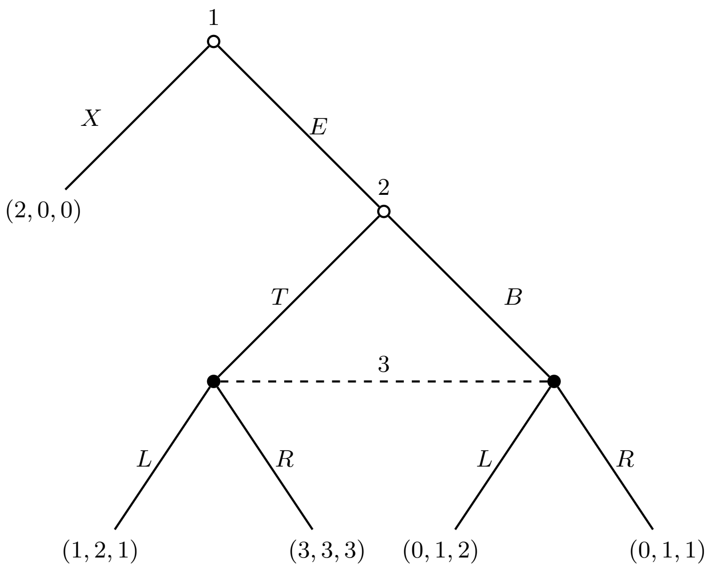

图 1: 一个带有不完美信息的博弈树

(a) 给出一个包含策略组合 (X, T, L) 的完美贝叶斯均衡（PBE）。请清楚写明该均衡中的推断，并证明该均衡满足课本和讲义中的要求 1、2、3。

(b) 证明：问题（a）中的 PBE 不是一个序贯均衡（Sequential Equilibrium）。

(c) 找出一个该博弈的纯策略序贯均衡。

如发现文档中的错误或笔误，请不吝告知 (yiming@hust.edu.cn)。

1.(a) 是一个贝叶斯博弈。两个投机者同时行动。θ 的具体取值对投机者 1 和投机者 2 的收益水平至关重要，但两个参与者都不能确定 θ 的值是多少。因此是非完全信息静态博弈。

1.(b) 没有不对称信息这一特征：没有哪个投机者在 θ 的具体值这一信息上比对方了解得更多。

1.(c) 标准式五要素：$G = \{N, A, T, P, U\}$

i) 参与人集：

$N = \{0, 1, 2\}$。注意这里需要引入"自然"作为第 0 个博弈参与人，否则后面的类型集就无法适当定义了（θ 既不是参与人 1 的类型也不是参与人 2 的类型）。

ii) 行为集：$A = A_0 \times A_1 \times A_2$

$A_1 = A_2 = \{k, nk\}$。$A_0 = \{\bar{a}_0\}$，自然的行为集是一个平凡集。

iii) 类型集：$T = T_0 \times T_1 \times T_2$

$T_1 = \{\bar{t}_1\}$，$T_2 = \{\bar{t}_2\}$。参与人 1 和参与人 2 的类型集都是平凡集。

$T_0 = [0, 1]$。$\theta \in T_0$ 作为自然的类型被引入。

iv) 推断：$P = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), p_2(\cdot))$

$p_1(\bar{t}_2|\bar{t}_1) = 1$；$f_1(\theta|\bar{t}_1) = 1$，$\forall \theta \in T_0$（注意 $p(\cdot)$ 为概率，而 $f(\cdot)$ 为概率密度）

$p_2(\bar{t}_1|\bar{t}_2) = 1$；$f_2(\theta|\bar{t}_2) = 1$，$\forall \theta \in T_0$

$p_0(\bar{t}_1|\theta) = 1$，$\forall \theta \in T_0$；$p_0(\bar{t}_2|\theta) = 1$，$\forall \theta \in T_0$

v) 收益函数：$U = (u_0(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot))$

对参与人 0，$u_0\left[(\bar{a}_0, a_1, a_2); (\theta, \bar{t}_1, \bar{t}_2)\right] \equiv 0$，$\forall (\bar{a}_0, a_1, a_2) \in A$，$\forall (\theta, \bar{t}_1, \bar{t}_2) \in T$。

对参与人 $i, j \in \{1, 2\}$ 且 $i \neq j$，

$$u_i\left[(\bar{a}_0, a_i, a_j); (\theta, \bar{t}_i, \bar{t}_j)\right] = \begin{cases} 0，\text{如果} a_i = nk\ ; \\ 1 - c，\text{如果} a_i = k，a_j = k\ ; \\ 1 - c，\text{如果} a_i = k，a_j = nk，\theta \leq \frac{1}{2}\ ; \\ -c，\text{如果} a_i = k，a_j = nk，\theta > \frac{1}{2}\ 。\end{cases}$$

说明：这里的关键是需要引入自然作为参与人 0，并把 θ 作为自然的类型。答卷中的符号、集合和收益函数的定义可以和上述答案不完全相同，但必须表达出同样的意思，且对参与人 0、1、2 的各个集合、推断、函数均给出定义（题目中已要求即使是平凡定义的情况，也请写出）。

1.(d) 不存在这种均衡。

证明：假设存在一个贝叶斯均衡，其中投机者 1 的策略是攻击，而投机者 2 的策略是不攻击。由于两个投机者关于 θ 的推断都是 $[0,1]$ 上的均匀分布，期望为 $\frac{1}{2}$。给定投机者 2 的策略，投机者 1 在选择攻击情况下，得到收益 $(1-c)$ 的概率和得到收益 $-c$ 的概率各为 $\frac{1}{2}$。贝叶斯均衡要求:

$$\frac{1}{2}(1-c)+\frac{1}{2}(-c)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad c\leq\frac{1}{2} \tag{1}$$

同样地，给定投机者 1 的策略，投机者 2 在选择攻击情况下，得到收益 $(1-c)$ 的概率为 1。贝叶斯均衡要求：

$$1-c\leq 0 \quad\Rightarrow\quad c\geq 1 \tag{2}$$

显然，要求(1)和要求(2)相矛盾。不存在上述均衡。 □

1.(e) $c=\frac{1}{8}$ 时，不存在两位投机者均选择不攻击的均衡。给定投机者 1 选择不攻击，投机者 2 选择攻击的期望收益为 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{8})+\frac{1}{2}(-\frac{1}{8})=\frac{3}{8}$，高于其选择不攻击的收益 0。贝叶斯均衡要求不被满足。

$c=\frac{1}{8}$ 时，存在两位投机者均选择攻击的均衡。给定投机者 1 选择攻击，投机者 2 选择攻击的期望收益为 $1\cdot(1-\frac{1}{8})=\frac{7}{8}$，高于其选择不攻击的收益 0。由对称性可知贝叶斯均衡对两者的策略要求均被满足。

1.(f) $c=0.8$ 时，存在两位投机者均选择不攻击的均衡。给定投机者 1 选择不攻击，投机者 2 选择攻击的期望收益为 $\frac{1}{2}(1-0.8)+\frac{1}{2}(-0.8)=-0.3$，低于其选择不攻击的收益 0。由对称性可知贝叶斯均衡对两者的策略要求均被满足。

$c=0.8$ 时，存在两位投机者均选择攻击的均衡。给定投机者 1 选择攻击，投机者 2 选择攻击的期望收益为 $1\cdot(1-0.8)=0.2$，高于其选择不攻击的收益 0。由对称性可知贝叶斯均衡对两者的策略要求均被满足。

∞∞

2.(a) 只需定义参与人 3 行动时对应信息集的推断即可。用博弈进行到左边节点（即博弈路径 E、T）的概率 p 来指代这一推断（博弈进行到右边节点概率为 $1-p$）。对任意 $p \in [0, \frac{1}{3}]$，策略组合 (X, T, L) 和推断 p 都组成一个 PBE。

证明如下：

(i) 要求 1：在每一信息集中, 应该行动的参与人必须对博弈进行到该信息集中的哪个节点有一个推断。

这里一共有三个信息集，参与人 1 和参与人 2 行动时的信息集对应的（唯一合理的）推断是显而易见的，不予讨论。参与人 3 信息集的推断为 p 和 $(1-p)$，分别代表党博弈进行到该信息集前提下，当前处于左边节点的条件概率，以及当前处于右边节点的条件概率。这是一个满足概率分布正规性要求的推断（都为非负，相加为 1）。

要求 1 满足。

(ii) 要求 2：给定参与人的推断, 参与人的策略必须是序贯理性的（sequentially rational ）。

考虑参与人 1。给定参与人 2 和参与人 3 的策略分别为 T 和 L，参与人 1 选择 X 的收益为 2，选择 E 的收益为 1。因此策略 X 满足序贯理性。

考虑参与人 2。给定参与人 1 和参与人 3 的策略分别为 X 和 L，以及参与人 2 的推断为博弈进行到对应节点的条件概率为 1（这是唯一合理的推断），其选择 T 的收益为 2 而选择 B 的收益为 1。因此策略 T 满足序贯理性。

考虑参与人 3。给次那个参与人 1 和参与人 2 的策略分别为 X 和 T，以及参与人 3 的推断由 p 表示。那么其选择 L 的期望收益为 $1 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 2 - p$，选择 R 的期望收益为 $3 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 + 2p$。当 $p \leq \frac{1}{3}$ 时，策略 L 满足序贯理性。

(iii) 要求 3：在处于均衡路径之上的信息集中, 推断由贝叶斯法则（Bayes's rule ）和参与人的均衡策略给出。

这一要求被平凡地满足：给定策略组合 (X, T, L)，参与人 2 和参与人 3 所处的信息集都为均衡路径之外的。

综上所述，根据幻灯片讲义中的定义，任何一个由 (X, T, L) 和 $p \in [0, \frac{1}{3}]$ 组成的组合，都构成一个 PBE。

说明：这里的关键是要求 2。在验证参与人 2 和参与人 3 的序贯理性时，需要基于他们各自所属信息集的推断。

2.(b) 根据幻灯片讲义中定义，一个序贯均衡需要满足要求 1、2、4。如上文所述，要求 1 和 2 被满足。现在只需要考虑要求 4。

(iv) 要求 4. 给定策略，推断满足一致性 (consistency)：存在一个完全混合的策略序列，使得这一序列收敛于给定策略，且对应的（通过贝叶斯法则得到的）推断序列也收敛于给定推断。

考虑任一完全混合的策略序列

$$(\Phi_n)_{n=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_n\ , & \alpha_n; \\ 1-\beta_n\ , & \beta_n; \\ 1-\gamma_n\ , & \gamma_n \end{pmatrix}_{n=1}^{\infty}$$

其中对于序列中的第 n 个策略组合，α_n、β_n、γ_n 分别表示参与者 1 选择 E 的概率、参与者 2 选择 B 的概率、参与者 3 选择 R 的概率。显然，当 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ 都收敛于 0 时，序列 Φ_n 收敛于 (X, T, L)。

对任一 Φ_n, 由于其为完全混合策略，贝叶斯法则永远可用（没有在均衡路径之外的信息集），我们很容易找到参与人 3 所持有的唯一合理的推断：

$$p_n = \frac{\text{Prob(博弈进行到参与人 3 所属信息集的左边节点)}}{\text{Prob(博弈进行到参与人 3 所属的信息集)}} = \frac{\alpha_n \cdot (1-\beta_n)}{\alpha_n} = 1-\beta_n$$

显然，当 β_n 收敛于 0，推断序列 p_n 只可能收敛于 1，而无法收敛于任一 $p \in [0, \frac{1}{3}]$。

综上所述，要求 4 没有被满足。(a) 中的 PBE 不是一个序贯均衡。

2.(c) 策略组合 (E, T, R) 和推断 $p = 1$（给定博弈进行到参与人 3 所述信息集，当前处于左边节点的条件概率为 1）显然构成一个 PBE。由于给定该策略，没有均衡路径以外的信息集，且 $p = 1$ 可由贝叶斯公式得到，因此上述组合也构成一个序贯均衡。

说明：这里的关键是给出策略组合 (E, T, R) 和推断 $p = 1$，这两个要素均不可缺少。证明它们构成一个序贯均衡的部分，可以像上段文字那样写得较简洁，也可以有正式证明，言之成理都可得到全部分数。